ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 7 OCTOBRE 1918.

PRÉSIDENCE DE M. P. PAINLEVÉ.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE DES SEMI-FLUIDES. — *Théorie du poinçonnage et de l'écoulement des blocs plastiques : phase élastique de ces phénomènes*. Note (1) de **M. J. Boussinesq.**

I. J'ai démontré, dans quatre Notes récentes de nos *Comptes rendus* (t. 167, 29 juillet, 5, 12 et 19 août 1918, p. 186, 221, 253, 285), les formules de Tresca sur le poinçonnage et l'écoulement des blocs plastiques, en rectifiant même ou, du moins, rationalisant les deux dernières, relatives ou au poinçonnage, ou à l'écoulement par un orifice inférieur, des blocs munis d'une ceinture rigide. Mais il y a lieu de reprendre les raisonnements et les calculs de ces Notes, pour y étudier une phase préalable des phénomènes restée dans l'ombre, savoir, la phase *élastique* s'y produisant, sous la forme d'un grand nombre d'états d'équilibre successifs, avant que les pressions par unité d'aire, $-N_z$ ou P_z, du *poinçon* ou du *piston* moteurs, à axe vertical pris comme axe des z, aient atteint les fortes valeurs qui amènent l'état plastique du bloc.

II. Dans cette phase préalable, les *pressions* (ou plutôt *tractions*) *principales* N_r, N_z, N_ω, suivant le rayon horizontal r émané de l'axe, suivant cet axe même Oz, et sur le plan méridien qui contient r et Oz, sont données par la formule, $-p + 2\mu\partial$, des forces élastiques principales dans un solide

---

(1) Séance du 30 septembre 1918.

isotrope *beaucoup plus déformable que compressible*, formule où p désigne la *pression moyenne*, μ (de Lamé) le *coefficient de rigidité*, et ∂ la dilatation élastique principale suivant le sens de la traction considérée. On aura donc, dans la *partie annulaire* du bloc, comprise depuis le rayon $r = R_0$ ou du poinçon, ou de l'orifice inférieur (quand il y en a un), jusqu'au rayon $r = R_1$ du bloc lui-même et (s'il y a écoulement) du piston moteur,

$$(1) \qquad (N_r, N_\omega, N_z) = -p + 2\mu\left(\frac{d\delta}{dr}, \frac{\delta}{r}, \partial'\right),$$

si ∂' y désigne la dilatation élastique des fibres verticales, *censée indépendante de la distance r à l'axe*, et δ la composante horizontale (fonction de r) des petits déplacements élastiques.

Le principe de conservation des volumes matériels fait connaître, pour cette petite composante horizontale δ des déplacements élastiques de la partie annulaire, les deux formules respectives

$$(2) \qquad \delta = \left(\partial_0 + \frac{\partial'}{2}\right)\frac{R_0^2}{r} - \frac{\partial'}{2}r, \qquad \delta = \frac{\partial'}{2}\left(\frac{R_1^2}{r} - r\right),$$

où ∂_0 exprime la dilatation linéaire du rayon R_0 du *cylindre central*, cylindre qui est la partie du bloc placée *directement* sous le poinçon ou sur l'orifice inférieur, et qui est censée *uniformément* dilatée ou contractée suivant les sens horizontaux, mais, par suite, *deux fois plus contractée ou dilatée verticalement*. La première de ces formules est générale et s'emploiera pour les blocs à surface latérale libre; la seconde, donnant $\delta = 0$ pour $r = R_1$, est spéciale aux blocs munis d'une ceinture rigide et où il n'y a de libre, quand on les poinçonne, que la face supérieure $\pi(R_1^2 - R_0^2)$ de la partie annulaire.

On admet donc ici, comme lorsqu'il s'agissait des états plastiques, la conservation, dans *chaque* partie centrale ou annulaire, de l'*horizontalité* des couches (avec *verticalité* des fibres), conservation entraînant encore l'existence de l'*unique* pression normale P_0, à la face concave $2\pi R_0 H$ de la partie annulaire, et d'un déplacement $\delta_0 = \partial_0 R_0$ *commun de part et d'autre suivant le sens horizontal*, mais non suivant le sens vertical.

Nous appellerons enfin $2k$ la différence, $P_z - P_0$, des deux pressions (proprement dites) *verticale et horizontale*, dans le cylindre central, différence qui, d'après la formule $(-p + 2\mu\partial)$ des forces élastiques principales, y vaudra le produit de 2μ par l'excédent de la *contraction* $2\partial_0$ des fibres verticales sur la *contraction linéaire* $(-\partial_0)$ des couches horizontales.

Il viendra donc

(3) $$k = 3\mu\partial_0.$$

III. Cela posé, étudions d'abord le cas du bloc poinçonné à surface latérale libre et considérons-y la partie *annulaire*.

D'après la formule (1) de N_z, la condition $N_z = 0$, ici vérifiable complètement, fera p égal à $2\mu\partial'$; ce qui, par l'élimination de p et la substitution à δ de la première expression (2), changera les formules (1) de N_r et de N_ω en celles-ci :

(4) $$N_r = -\mu\left[(2\partial_0 + \partial')\frac{R_0^2}{r^2} + 3\partial'\right], \qquad N_\omega = \mu\left[(2\partial_0 + \partial')\frac{R_0^2}{r^2} - 3\partial'\right].$$

L'équation indéfinie de l'équilibre, portant le n° 1 à ma Note du 29 juillet (p. 189) et qui est

(5) $$\frac{dN_r}{dr} = \frac{N_\omega - N_r}{r},$$

se trouve identiquement satisfaite. Enfin, la condition de liberté de la surface latérale, $N_r = 0$ (pour $r = R_1$), déterminant ∂', il vient

(6) $$\left\{\begin{aligned} &\partial' = -\frac{2\partial_0 R_0^2}{R_0^2 + 3R_1^2}, \qquad \delta = \frac{\partial_0 R_0^2}{R_0^2 + 3R_1^2}\left(3\frac{R_1^2}{r} + r\right), \\ &-N_r = \frac{6\mu\partial_0 R_0^2}{R_0^2 + 3R_1^2}\left(\frac{R_1^2}{r^2} - 1\right), \qquad N_\omega - N_r = \frac{12\mu\partial_0 R_0^2 R_1^2}{(R_0^2 + 3R_1^2)r^2}. \end{aligned}\right.$$

IV. La pression P_0 du cylindre central, sur la face concave $2\pi R_0 H$ de la partie annulaire, n'est autre chose que $-N_r$ à la limite $r = R_0$. La troisième formule (6) donnera donc, pour relier cet *effort* P_0 *d'expansion latérale du cylindre central* à la force tangentielle maximum $k = 3\mu\partial_0$ s'exerçant dans tout son intérieur, la proportion simple

(7) $$\frac{P_0}{k} = \frac{2(R_1^2 - R_0^2)}{R_0^2 + 3R_1^2} = \frac{2\nu'}{4 + 3\nu'}.$$

Pour abréger, j'ai désigné par $1 + \nu'$ le rapport de R_1^2 à R_0^2, racine carrée de celui qui est appelé $1 + \nu$ à la fin de ma Note du 29 juillet 1918 (p. 192).

A l'état plastique, le rapport analogue de P_0 à K, résultant de l'annulation de N_r pour $r = R_1$ dans l'équation (2) de la même Note, est

(8) $$\frac{P_0}{K} = 2\log\frac{R_1}{R_0} = \log(1 + \nu').$$

Or celui-ci excède le double du précédent (7); car on a

$$\log(1+\nu') - \frac{4\nu'}{4+3\nu'} > 0,$$

inégalité à premier membre nul avec ν', mais dont la dérivée, $\frac{\nu'(8+9\nu')}{(1+\nu')(4+3\nu')^2}$, est ici positive comme ν'.

Considérons l'instant précis où k devient K par le passage du cylindre central à l'état plastique. A ce moment, les rapports (7) ne sont donc pas encore la moitié des rapports (8). Et l'on peut dire que *le passage ultérieur à l'état plastique de la partie annulaire fera plus que doubler l'effort* P_0 *d'expansion latérale exercé sur elle par le cylindre central.*

V. On procédera exactement de même, à partir de la seconde expression (2) de δ, si le bloc poinçonné est muni d'une ceinture rigide, en se souvenant, pour déterminer finalement ∂', que $\delta = \partial_0 R_0$ à la limite $r = R_0$. Au lieu des proportions (7) et (8), on trouvera

$$(9) \qquad \frac{P_0}{k} = \frac{2}{3}\frac{4+\nu'}{\nu'}, \qquad \frac{P_0}{K} = \frac{\nu'+1}{\nu'}\left[\frac{3}{4}\frac{(\nu'+1)^2-2}{(\nu'+1)^2} + \log(\nu'+1)\right],$$

formules dont la seconde suppose $\nu'+1$ au moins égal à 3 et se déduit de l'équation (12) de ma Note du 19 août [1] en prenant $-\frac{3}{8}$ comme valeur *un peu arrondie* de $\log\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} = -0,37488$.

A la limite $\nu'+1=3$ ou $\nu'=2$, ces rapports sont respectivement 2 et 2,523. Mais, à mesure que ν' grandit, les premiers diminuent et les seconds augmentent, *en faisant ainsi croître la grandeur relative de l'effort* P_0 *d'expansion dû à l'établissement de l'état plastique dans la partie annulaire.*

Lorsque ν' est inférieur à 2, ou R_0 plus grand que $0,5773\,R_1$, la seconde relation (9) fait place à une autre, déduite de la formule (14 *bis*) de la même Note du 19 août (p. 289),

$$(10) \qquad \frac{P_0}{K} = 2 + \frac{4}{3}\frac{\nu'+1}{\nu'}\log\frac{(\nu'+4)^2}{16\sqrt{\nu'+1}}.$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 287.

Celle-ci, donnant encore des rapports de P_0 à K croissants avec ν', ou variables en sens inverse de ceux qu'exprime la première (9), rend *le* P_0 *élastique* (pour $k = K$) *égal au* P_0 *plastique*, et à $2,4058\,K$, quand

$$\nu' = 1,5333 \quad \text{et} \quad R_0 = 0,6283\,R_1.$$

Dès lors, *pour les poinçons relativement plus larges* (couvrant près ou plus des $\frac{2}{3}$ du bloc), *le* P_0 *élastique devient le plus grand ; et la résistance à l'écrasement semble devoir être abaissée par le passage à l'état plastique de la partie annulaire* [1].

VI. Arrivons enfin au problème de l'écoulement du bloc, par l'orifice central πR_0^2 ouvert dans le plateau support, sous la pression du piston à base πR_1^2, entouré de la ceinture rigide et y glissant sans frottement de haut en bas.

Ici, la pression verticale $-N_z$ ou P_z n'est plus nulle sous la partie annulaire $\pi(R_1^2 - R_0^2)$ de la base du piston, mais l'est sous la partie centrale, ou sur l'orifice πR_0^2; en sorte que l'annulation, dans le cylindre central, de P_z ou $-N_z$, y réduit à $-P_0$ la différence $P_z - P_0 = 2k = 6\mu\partial_0$, et que P_0 y devient *pression principale unique*, avec la valeur $3\mu(-\partial_0)$.

La formule (1) de N_z ne donnera donc plus, *dans la partie annulaire du bloc*, $p = 2\mu\partial'$, mais

$$p = 2\mu\partial' - N_z = 2\mu\partial' + P_z.$$

Et les deux autres formules (1) deviendront

$$(11) \qquad -N_r = \mu\partial'\left(\frac{R_1^2}{r^2} + 3\right) + P_z, \qquad N_\omega = \mu\partial'\left(\frac{R_1^2}{r^2} - 3\right) - P_z,$$

valeurs qui, portées dans l'équation indéfinie (5) de l'équilibre, astreindront la pression P_z du piston, par unité d'aire, à être indépendante de r ou *uniforme*, bref, à avoir partout la même valeur qu'à la limite $r = R_0$ où $-N_r = P_0 = 6\mu(-\partial_0)$. Et comme, d'ailleurs, dans la seconde équation (2), $\mathcal{E} = \partial_0 R_0$ pour $r = R_0$ (ce qui relie à la contraction verticale $-\partial'$, qui sera directement connue, celle $-\partial_0$, du rayon R_0 du cylindre central, que nous préférons garder comme figurant dans $k = 3\mu\partial_0$), la première

---

[1] Il faudrait toutefois, avant de conclure d'une manière ferme, pouvoir s'assurer, au point de vue du non-dépassement des limites d'élasticité, que les formules (1) de N_r, N_ω, N_z y restent bien applicables.

relation (11) donnera finalement, pour la poussée du piston par unité de son aire *active* $\pi(R_1^2 - R_0^2)$,

$$(12) \qquad P_z = \frac{8\mu(-\partial_0)R_1^2}{R_1^2 - R_0^2}; \qquad \text{d'où} \quad \frac{P_z}{\sqrt{k^2}} = \frac{8}{3}\frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} = \frac{8}{3}\frac{\nu'+1}{\nu'}:$$

$\sqrt{k^2}$ signifie ici la valeur absolue de k, c'est-à-dire le produit positif $3\mu(-\partial_0)$.

Les rapports

$$(13) \qquad \frac{P_z - 2\sqrt{k^2}}{\sqrt{k^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\text{moyenne } P_z - 2K}{K}$$

joueront maintenant le rôle qu'avaient $\frac{P_0}{k}$ et $\frac{P_0}{K}$ dans la question du poinçonnage : ils seront exprimés par les seconds membres des formules (9), (10) et comporteront, par suite, les conclusions énoncées au n° V comme dérivant de ces formules. Cela résulte, pour l'état plastique, des équations (15) et (16) de la Note citée du 19 août 1918 (p. 289).

BOTANIQUE. — *Classification des Dicotylédones. Anthogones.* Note [1] de M. Paul Vuillemin.

Les Anthogones ont des attaches multiples avec les groupes inférieurs de Dicotylédones. Des familles, directement issues des Acrogones et même des Amphigones, n'ont entre elles qu'une parenté collatérale. On ne peut apprécier leurs affinités sans descendre aux bases des séries dont elles dépendent.

Ainsi les Cucurbitacées sont un appendice des Cytinales, peu différent des Aristoloches et des Bégonias dont l'albumen est inconstant et dont les étamines se pétalisent dans les fleurs pleines. Les Nymphéacées prolongent les Hydnoracées; leur parenté avec les Nélumbiacées ressort moins des ressemblances extérieures que de l'affinité des Chloranthinées, dont proviennent ces dernières, avec les Pipérinées, souche des Hydnoracées et des Nymphéacées. Les Caryophyllées continuent les Illécébrinées; les Cistacées n'offrent pas de différence plus importante avec les Polygoninées que la substitution de pétales aux étamines alternisépales. Les Frankéniacées (incl. Réaumuriées), les Plumbaginacées, se détachent de divers niveaux

[1] Séance du 23 septembre 1918.

des Polygonales. D'autres branches, émigrées dans le domaine des Anthogones, ont évolué assez puissamment pour constituer des ordres, des classes indépendantes.

Les Bixales ont des rapports avec les Polygonales et les Sterculiales. Nous y distinguons trois ordres : Bixinées, Ericinées, Erythroxylinées. Les Bixinées forment le tronc principal avec les Canellacées, Bixacées, Droséracées, Sarracéniacées, Marcgraviacées, Parnassiacées (incl. Francoées, Bréxiées), Sauvagésiées, Violacées, Papavéracées, Fumariacées. Les Ericinées débutent par les Pirolacées, assez proches des Parnassiées dont elles ont les anthères extrorses; on y trouve les Ericacées, les Epacridées, les Empétracées. Les Erythroxylinées comprennent les Erythroxylacées, Linacées, Oxalidées, Sarcolénées, Humiriées.

Les Malvacées continuent certainement les Sterculiacées, à côté d'un groupe de plantes apocarpes couronnant le tronc des Sterculiales. Les affinités signalées entre les Bixacées et les Malvacées indiquent leur commune origine au voisinage des Myricinées, vers le nœud qui unit les Sterculiales aux précurseurs des Polygonales. La principale différence porte sur l'ovaire, uniloculaire chez les Bixinées et les Polygonales, pluriloculaire chez les Malvinées (Malvacées, Tiliacées, Ternstrœmiacées), mais à carpelles parfois disjoints, rappelant, notamment dans la famille des Malvacées, l'apocarpie des Sterculiales. L'ovule est anatrope et, dans le cas où le sens de la courbure est précisé, épinaste comme chez les Papavéracées. Les anthères, extrorses chez les Malvacées et les Tiliacées, sont introrses chez les Ternstrœmiacées, sauf dans les genres inférieurs *Actinidia*, *Camellia*. N'était la centralisation du pistil, le *Camellia* ne se séparerait pas des *Calycanthus*, dont il a la fleur désordonnée, l'androcée, la graine exalbuminée. Il révèle une étroite connexion entre les Malvinées et les Magnolinées, qui constituent ensemble la classe des Magnoliales.

Les Magnolinées réunissent la majeure partie des Anthogones Apocarpes (Aphanocycliques ou Polycarpiques des auteurs). L'ordre comprend trois branches : la première, continuant les Sterculiacées, est formée des Calycanthacées, Monimiacées, Renonculacées; la seconde, continuant les Lardizabalées, embrasse les Berbéridacées, Lauracées, Pachygonacées, Ménispermacées; la troisième (Annonacées, Magnoliacées) continue les Myristicacées.

Les Connarales sont une autre classe d'Apocarpes, ayant des affinités avec les Sterculiales et les Polygonales. L'ovule est droit chez les Connaracées, anatrope chez les Crassulacées, épinaste et unique chez les Coriariées

DICOTYLÉDONES

AMPHIGONES — CLASSE	AMPHIGONES — ORDRES	ACROGONES — CLASSES	ACROGONES — ORDRES	ANTHOGONES — CLASSES	ANTHOGONES — ORDRES	ANTHOGONES — FAMILLES
Amentales	Pipérinées	Cytinales (Hydnoracées)				Cucurbitacées
						Nymphéacées
	Chloranthinées					Nélumbiacées
				Connarales		
		Sterculiales		Magnoliales	Magnolinées	Renonculacées
					Malvinées	
				Bixales	Bixinées	
					Érythroxylinées	
					Éricinées	
		Polygonales	Polygoninées			Cistacées
					Plumbagininées	Plumbaginacées
	Myricinées					Frankéniacées
			Illécébrinées			Caryophyllées
				Rhamnales	Rhamninées	
				Anacardiales	Térébinthinées	
				Araliales	Aralinées	Ombellifères
				Asterales	Astérinées	Composées
					Rubiinées	Rubiacées
						Oléacées
					Sambucinées	Cornacées
				Solanales	Asclépiadinées	Asclépiadées
						Boraginacées
					Sapotinées	
					Solaninées	
					Gesnérinées	Gentianacées
						Scrophulariacées
						Labiées
				Myrtales	Samydinées	
					Myrtinées	
					Œnothérinées	
				Rosales	Capparidinées	Crucifères
						Moringacées
					Rosinées	Légumineuses
		Urticales				Rosacées
						Géraniacées
	Juglandinées				Célastrinées	Célastracées
	Salicinées					Sapindacées
	Casuarinées					
	Cupulifères					

(incl. Limnanthées), hyponaste chez les Dilléniacées, qui se rapprochent des Connaracées par l'arille également connu chez les Sterculiacées (*Lasiopetalum*), des Phytolaccacées, notamment par la structure de la tige.

La classe des Rosales, dérivée des Urticales, se compose de trois ordres. Les Capparidinées comprennent deux grandes séries : 1° Capparidacées, Malpighiacées, Vochysiacées, Résédacées, Crucifères, Tropæolacées, Trigoniacées; 2° Moringacées, Passifloracées, Turnéracées, Stackhousiacées. Dans les Rosinées nous distinguons : 1° Rosacées, Légumineuses, Krameriacées, Polygalacées; 2° Géraniacées, Balsaminées, Zygophyllacées. Les séries de Célastrinées sont : 1° Célastracées, Staphyléacées, Mélianthacées, Sapindacées, Ilicacées; 2° Luxemburgiées, Ochnacées.

Plusieurs classes d'Anthogones dérivent directement des Amentales : Les Rhamnales forment un seul ordre, Rhamninées, débutant par les Gunnéracées (incl. *Mittellopsis*) issues des Garryacées (Myricinées), se continuant par les Vitacées, Rhamnacées; les étamines y sont épipétales. Les Anacardiales (ordre des Térébinthinées) avec les Anacardiacées ou Térébinthacées, les Simarubacées, les Rutacées, les Clusiacées, sont reliées aux Chloranthinées par le *Liquidambar*. La chalazogamie atteste en outre une affinité avec des Amphigones syncarpes uniloculaires (Juglandinées) ou pluriloculaires (Casuarinées).

Les Araliales issues des Juglandinées comprennent un seul ordre : Aralinées (Araliacées, Ombellifères).

Les Asterales ou Gamopétales inférovariées sont divisées en trois ordres : Astérinées, partant du tronc commun aux Myricinées et aux Juglandinées (Composées, Lobéliacées, Campanulacées, Valérianacées); Rubiinées (Rubiacées, Salvadorées, Jasminacées, Oléacées, Cornacées); Sambucinées (Sambucacées, Lonicéracées, Dipsacées, Calycéracées).

Les Solanales renferment la majorité des Gamopétales supérovariées. Les Asclépiadinées, provenant des Sambucinées, contiennent deux séries : 1° Asclépiadées, Apocynées; 2° Hydrophyllacées, Hydroléacées, Boraginacées. L'ordre des Sapotinées comprend les Sapotacées et les Convolvulacées. Aux Solaninées appartiennent les Loganiacées, Polémoniacées, Nolanées, Solanées. L'ordre des Gesnérinées se compose de trois séries débutant avec des ovaires uniloculaires : 1° Gentianacées; 2° Gesnéracées, Scrophulariacées, Sélaginacées, Plantaginacées; 3° Utriculariacées, Bignoniacées, Acanthacées, Verbénacées, Labiées.

Les Myrtales partent du tronc commun aux classes précédentes, avec lesquelles elles ont une parenté collatérale. Rarement gamopétales ou unilo-

culaires, elles ont souvent des nodules sécréteurs, l'ovaire infère, l'androcée très variable. Le premier ordre, Samydinées, comprend les Samydacées, Styracées, Méliacées (incl. *Leea*), Myrsinacées, Primulacées, Ebénacées; le second ordre, Myrtinées, comprend les Hypéricacées, Lythracées, Myrtacées, Lécythidacées, Mélastomacées, Punicacées, Cactacées, Ribésiacées, Loasacées; le troisième ordre, Œnothérinées, comprend les Œnothéracées, Haloragées, Saxifragacées, Rhizophoracées, Anisophyllées, Combrétacées.

Le Tableau ci-joint indique l'enchaînement des classes et des ordres de Dicotylédones, répartis entre les Amphigones, les Acrogones et les Anthogones. La dernière colonne mentionne des familles notoires, d'autres servant de type à des séries de chaque ordre d'Anthogones ou prolongeant des catégories d'Haplogones.

ZOOLOGIE. — *Sur la place des Chéloniens dans la classification.* Note [1] de M. G.-A. Boulenger.

Tous ceux qui, dans ces dernières années, se sont occupés de la phylogénie des Vertébrés ont été d'accord pour considérer le crâne des Batraciens Stégocéphales comme le type primitif dont celui des Batraciens proprement dits et celui des Reptiles ont été dérivés, une des principales modifications qui s'est produite au cours de l'évolution étant la suppression graduelle de diverses pièces de la voûte crânienne, pour comprendre les homologies desquelles nous devons remonter aux Poissons Crossoptérygiens.

Si l'on se bornait à considérer l'ensemble de cette voûte sans s'occuper des détails, on pourrait dire que certains Batraciens Anoures sont aussi stégocéphales, et il y a en effet une certaine ressemblance entre le crâne d'un *Branchiosaurus amblystomus* Credner et celui d'un *Pelobates cultripes* Cuvier. Il n'est pourtant venu à l'idée de personne de suggérer un rapport quelconque entre ces deux types; la stégocéphalie du Pélobate est évidemment secondaire; on n'a, pour s'en convaincre, qu'à comparer les éléments dont il se compose, et l'espèce *Pelobates fuscus* Laur. est d'ailleurs là pour nous montrer par quelle étape ce résultat a été atteint.

Le crâne de beaucoup de Chéloniens, appartenant aux groupes les plus divers, forme aussi une voûte temporale complète, que j'ai toujours consi-

[1] Séance du 30 septembre 1918.

dérée également comme secondaire. Cependant, deux paléontologistes des plus distingués, D.-M.-S. Watson ([1]) et S.-W. Williston ([2]) tout récemment, ont soutenu l'opinion de G. Baur ([3]) et de O.-P. Hay ([4]) que ce type de crâne est le plus primitif et ils pensent même pouvoir le dériver de celui des Reptiles Cotylosauriens, qui se rattachent si clairement aux Stégocéphaliens qu'on est en droit de les en considérer comme les descendants directs.

Les Chéloniens s'écartent beaucoup, par suite de leur extrême spécialisation, vraiment unique, des Rhynchocéphaliens proprement dits, dont *Sphenodon* est le représentant bien connu, qui diffèrent considérablement, par la réduction des éléments du crâne, des Reptiles les plus primitifs. Un crâne semblable à celui de *Sphenodon* me semble pourtant offrir les conditions requises pour en dériver celui des Chéloniens. Seulement, chez ceux-ci, nous ne trouvons jamais à la fois, si ce n'est secondairement (*Baëna*, *Chelone*, *Dermochelys*), les arcades sur-, sub- et post-temporales. Les deux premières, sans être séparées l'une de l'autre par une ouverture, sont représentées chez le Cryptodère le plus généralisé : *Chelydra* (post-frontal relié au squamosal, jugal relié au quadratojugal); la troisième ne se rencontre, à l'état primaire, que chez certains Pleurodères, *Hydraspis* par exemple (pariétal relié au squamosal, tout comme chez *Sphenodon*). Il est inutile de se reporter aux formes fossiles connues, dont les crânes sont toujours à l'état de raretés, car elles n'offrent aucun éclaircissement à ce sujet.

Si nous comparons entre eux les genres voisins dont la voûte crânienne s'est étendue ([5]), par exemple *Chelydra* à *Macroclemmys* ou *Hydraspis* à *Emydura* et *Elseya*, nous constatons que, sous les autres rapports, les premiers sont plus généralisés que les seconds : plaques marginales supplémentaires chez *Macroclemmys*, suppression des éléments neuraux de la carapace chez *Emydura* et *Elseya*. On arrive à la même conclusion en comparant les Pleurodères *Sternothærus* et *Podocnemis*, l'extension de la voûte crânienne chez le second étant associée à la réduction de la pièce supplémentaire du plastron, réduction dont la signification n'a jamais été

([1]) *Proc. Zool. Soc. Lond.*, 1914, p. 1011.
([2]) *Journ. of Geol.*, t. 25, 1917, p. 419.
([3]) *Journ. of Morphol.*, t. 3, 1889, p. 472.
([4]) *Bull. Amer. Mus. Nat. Hist.*, t. 21, 1905, p. 150.
([5]) Consulter les figures dans mon *Catalogue of Chelonians* (*Brit. Mus.*, 1889).

contestée. D'autres genres à région temporale complètement couverte, tels que les Chélonées ou Tortues marines, sont, on en convient généralement, des formes hautement évoluées; on peut facilement les rattacher, en ce qui concerne la dérivation du crâne, à un type tel que nous présente *Chelydra*. Je ne vois donc rien, parmi les Chéloniens vivants, qui puisse indiquer que les formes à voûte crânienne seraient les plus primitives; au contraire, l'inverse me paraît évident.

Essayons cependant de dériver la voûte temporale des Chéloniens de celle des Cotylosauriens. Chez les plus généralisés parmi ceux-ci, cette voûte est formée en partie par un certain nombre d'éléments (post-orbitaire, sur-temporal, post-pariétal, post-temporal) qui n'existent chez aucun Chélonien; mais il y en a d'autres chez lesquels les deux derniers éléments ont disparu graduellement à l'arrière du crâne, tandis que les deux premiers, enclavés qu'ils sont, ont dû probablement se fusionner avec leurs voisins le post-frontal et le squamosal. Mais alors, on devrait pouvoir reconnaître cette fusion à la forme ou à l'étendue de ces éléments; c'est ce que nous constatons d'ailleurs dans le cas de *Labidosaurus* Cope (¹), dont le sur-temporal a disparu, mais dont le squamosal est par contre démesurément grand, tandis que l'étendue du pariétal n'a pas changé. Or, chez les Chéloniens, quel que soit le développement de la voûte, le squamosal est resté relativement petit, comme chez *Sphenodon;* la même tendance se reconnaît chez tous, la voûte temporale a été formée uniquement par l'extension des pariétaux, ce qui indique qu'elle ne dérive point du type Cotylosaurien, dont les modifications de l'arrière du crâne selon les genres ont été diverses sans jamais se rapprocher de ce qui est caractéristique des Chéloniens.

Jusque tout récemment, on semblait d'accord pour dériver le plastron des Chéloniens des ossifications ventrales, transformées en « côtes abdominales », des Batraciens et Reptiles primitifs, qui se seraient unies aux clavicules et à l'interclavicule, qu'elles ne recouvrent jamais comme le font les ossifications dermiques de certains Crocodiliens et Lacertiliens, et même de *Dermochelys* parmi les Chéloniens. Le fait que ce plastron primitif manque ou n'existe qu'à l'état de vestige chez tous les Cotylosauriens connus, comme je l'ai dit dans une Note récente (²), me semble s'opposer à la théorie que je repousse en ce qui concerne le crâne, et il en est de même

---

(¹) WILLISTON, *Journ. of Geol.*, t. 25, 1917, p. 456.

(²) *Comptes rendus*, t. 165, 1917, p. 456.

de la tendance à la direction postérieure du bassin qui dans ce groupe est à l'inverse de celle qui caractérise les Chéloniens, ainsi que les Rhynchocéphaliens proprement dits, les Plésiosauriens et les Lacertiliens.

Watson ([1]) cependant est disposé à rejeter cette interprétation et il suggère une comparaison des pièces du plastron des Chéloniens, autres que les clavicules et l'interclavicule, pièces dont le nombre varie de cinq (*Protochersis* E. Fraas, du Trias) à trois paires, aux ossifications dermiques ventrales des Crocodiliens. L'argument qu'il invoque pour mettre en doute l'homologie admise par ses devanciers est tiré de ce que les os du plastron sont pairs, tandis qu'il y a généralement une pièce impaire et médiane à chaque segment du système des côtes abdominales chez les Rynchocéphaliens : argument qui ne me semble avoir aucune valeur par le fait que pareille réduction s'est produite pour la dossière de bien des Chéloniens (disparition des plaques neurales) et que l'interclavicule elle-même a été supprimée chez les Cinosternides.

Il n'est pas jusqu'au caractère du cinquième métatarsien, réduit et courbé, qui ne s'explique que par rapport aux Rhynchocéphaliens. Ce caractère, dont j'ai été le premier à faire usage pour définir les *Rhynchocephalia vera* ([2]), a même servi de base à une classification des Reptiles; c'était certes en exagérer l'importance, mais je n'en suis pas moins d'accord avec Goodrich ([3]) sur sa portée en ce qui concerne l'origine des Chéloniens.

En 1903, Osborn ([4]) avait proposé de rapprocher les Chéloniens des Théromores en s'appuyant sur le nombre réduit des phalanges (à l'exception des Trionyx). Williston, cité plus haut, a fait justice de cet argument et je partage entièrement son opinion sur ce point.

Il y a 30 ans, j'étais d'avis que les Rhynchocéphaliens représentent le type le plus généralisé de tous les Reptiles vivants; qu'ils se rapprochent à beaucoup d'égards des Batraciens stégocéphales; et qu'il se peut que les ancêtres des Chéloniens, des Plésiosauriens et des Lacertiliens faisaient partie de cet ordre. C'est encore mon avis aujourd'hui, en attendant que de nouvelles découvertes paléontologiques viennent fournir les éclaircissements nécessaires. En tout cas je ne puis me rallier à l'opinion de

---

([1]) *Proc. zool. Soc. Lond.*, 1914, p. 1013.

([2]) *Ann. and Mag. Nat. Hist.*, série 6, t. 11, 1893, p. 209.

([3]) *Proc. Roy. Soc. Lond.*, série B, t. 89, 1916, p. 261.

([4]) *Mem. Amer. Mus. Nat. Hist.*, t. 1, 1903, p. 451.

Watson (¹) en ce qui concerne le genre *Eunotosaurus* Seeley, pour lui probablement un ancêtre des Chéloniens, mais dont le spécimen figuré, que j'ai pu examiner, me semble loin de justifier ses conclusions; je préfère donc m'en tenir provisoirement aux vues exprimées par Seeley (²) au sujet de ses affinités avec les Mésosauriens.

PLIS CACHETÉS.

M. L. **Puget** demande l'ouverture d'un pli cacheté reçu dans la séance du 23 septembre 1918 et inscrit sous le n° 8574.

Ce pli est ouvert en séance par M. le Président. Il contient une lettre qui est renvoyée à la Commission de Balistique.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Le tome II de l'ouvrage écrit en français par E.-C. Abendanon : *Voyages géologiques et géographiques à travers la Célèbes centrale*. (Hommage de la Société Royale de Géographie des Pays-Bas, à Amsterdam). (Présenté par M. H. Douvillé.)

M. **Amédée Laronde** adresse des remercîments à l'Académie pour la distinction accordée à ses travaux.

(¹) *Loc. cit.* Watson va même jusqu'à placer les *Eunotosauria* comme division ordinale des *Chelonia* dans sa classification de 1917.

(²) *Quart. Journ. Geol. Soc. Lond.*, t. 48, 1892, p. 583.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles vérifiés par les polynomes hypersphériques.* Note de M. J. **Kampé de Fériet**, présentée par M. P. Appell.

Les Notes publiées récemment par M. P. Appell [1], sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, ont à nouveau attiré mon attention sur l'un des plus remarquables d'entre eux : *le système de n équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, qui appartient aux polynomes hypersphériques zonaux* $V_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)$.

Dans ma Thèse [2], voulant établir ce système en évitant les calculs un peu laborieux de Didon [3] (qui, le premier, en a rencontré un cas particulier), je me suis servi du fait que $V_{m_1, \ldots, m_n}$ a pour expression

$$x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} F_B\left(-\frac{m_1}{2}, \ldots, -\frac{m_n}{2}, \frac{1-m_1}{2}, \ldots, \frac{1-m_n}{2}, -\frac{n}{2}-\mu+1, \frac{1}{x_1^2}, \ldots, \frac{1}{x_n^2}\right),$$

F_B étant une des fonctions hypergéométriques de M. Lauricella [4].

Cette voie, qui exige, au préalable, la formation de l'expression générale des $V_{m_1, \ldots, m_n}$ et la connaissance du système d'équations de la fonction F_B, est encore bien détournée ; je me propose de montrer comment on parvient au même résultat, par une méthode intuitive, *tirée directement de la définition de* $V_{m_1, \ldots, m_n}$.

Ces polynomes hypersphériques s'introduisent, en effet, de la manière suivante : considérons un espace à $(n+2)$ dimensions, où un point a pour coordonnées cartésiennes rectangulaires $z_1, \ldots, z_{n+2}$, et posons

$$r^2 = z_1^2 + \ldots + z_n + \rho^2, \qquad \rho^2 = z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2;$$

---

(1) P. Appell, *Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 309 et 408.

(2) *Sur les fonctions hypersphériques* (*Thèse*, Paris, 1915, p. 36; Gauthier-Villars).

(3) F. Didon, *Étude de certaines fonctions analogues aux fonctions* X_n *de Legendre* (*Ann. scient. de l'École Normale sup.*, 1re série, t. 5, 1868, p. 249). Pour les généralités, voir l'article de P. Appell et A. Lambert dans l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. 2, vol. 5, fasc. 2.

(4) G. Lauricella, *Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili* (*Rend. del Circolo Matematico di Palermo*, t. 7, 1893, p. 111).

la fonction

(1) $$W(z_1, \ldots, z_n, \rho) = \frac{(-1)^\mu}{m_1!\ldots m_n!}\frac{\partial^\mu}{\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_n^{m_n}}\left(\frac{1}{r^n}\right) \qquad (\mu = m_1 + \ldots + m_n)$$

est une solution de l'équation de Laplace :

$$\Delta^2 W \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 W}{\partial z_{n+2}^2} \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 W}{\partial z_n^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}\right) = 0.$$

En passant des $(z_1, \ldots, z_{n+2})$ aux coordonnées $(r, x_1, \ldots, x_n, \varphi)$ ainsi définies [1] :

(2) $$z_1 = rx_1 \ldots z_n = rx_n,$$
$$z_{n+1} = r\sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}\cos\varphi, \qquad z_{n+2} = r\sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}\sin\varphi.$$

on pose

$$W(z_1, \ldots, z_n, \rho) = \frac{1}{r^{n+\mu}}V_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Le polynome V est donc la valeur que prend, sur l'hypersphère (S) : $r^2 = 1$, la fonction W, harmonique à l'extérieur de (S).

Ceci rappelé, montrons qu'il est bien facile de *former un système de n équations aux dérivées partielles, auquel satisfait* W; dans ce but, nous partirons des identités *évidentes*

(3) $$\rho\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{1}{r^n}\right) - z_k\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{r^n}\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Dérivons l'identité de rang k, m_1 fois par rapport à $z_1, \ldots, (m_k + 1)$ fois par rapport à $z_k, \ldots, m_n$ fois par rapport à z_n. En jetant un simple regard sur la définition (1) de W, nous obtenons par ce procédé les équations annoncées

(4) $$\rho\frac{\partial^2 W}{\partial z_k^2} - z_k\frac{\partial^2 W}{\partial z_k\,\partial\rho} - (m_k + 1)\frac{\partial W}{\partial\rho} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous pouvons aussi les écrire

(5) $$\frac{\partial}{\partial z_k}\left[\rho\left(\rho\frac{\partial W}{\partial z_k} - z_k\frac{\partial W}{\partial\rho}\right)\right] - m_k\rho\frac{\partial W}{\partial\rho} = 0.$$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 8.

Or W est homogène de degré $-(\mu+n)$ en $z_1, \ldots, z_n, \rho$; donc

$$(6) \qquad \rho\frac{\partial W}{\partial \rho}+\sum_{j=1}^{j=n} z_j\frac{\partial W}{\partial z_j}=-(\mu+n)W.$$

Nous aboutissons alors à une expression où ne figurent plus que les dérivées par rapport aux z :

$$\frac{\partial}{\partial z_k}\left\{\rho^2\frac{\partial W}{\partial z_k}+z_k\left[(\mu+n)W+\sum_{j=1}^{j=n} z_j\frac{\partial W}{\partial z_j}\right]\right\}+m_k\left[(\mu+n)W+\sum_{j=1}^{j=n} z_j\frac{\partial W}{\partial z_j}\right]=0.$$

En passant des $(z_1, \ldots, z_n, \rho)$ aux $(r, x_1, \ldots, x_n)$ et de W à V, nous retrouvons enfin le système de n équations du polynome $V_{m_1,\ldots,m_n}$, sous la forme que je lui ai donnée ([1]) :

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial V}{\partial x_k}-x_k\left[(\mu+n)V+\sum_{j=1}^{j=n} x_j\frac{\partial V}{\partial x_j}\right]\right\}$$
$$+(m_k+1)\left[(\mu+n)V+\sum_{j=1}^{j=n} x_j\frac{\partial V}{\partial x_j}\right]=0.$$

Pour terminer, portons notre attention sur l'équation obtenue en faisant la somme des n relations (4)

$$\rho\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial^2 W}{\partial z_k^2}-\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\sum_{k=1}^{k=n} z_k\frac{\partial W}{\partial z_k}\right]-(\mu+n)\frac{\partial W}{\partial \rho}=0;$$

comme, d'après la formule d'homogénéité (6),

$$-\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\sum_{k=1}^{k=n} z_k\frac{\partial W}{\partial z_k}\right]-(\mu+n)\frac{\partial W}{\partial \rho}=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial \rho}\right),$$

la somme des relations (4) se confond donc avec l'équation de Laplace

$$\rho\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial^2 W}{\partial z_k^2}+\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)=0.$$

([1]) *Loc. cit.*, p. 37.

C'est là l'explication de ce fait [que j'avais déjà remarqué [1] sans en dégager la véritable raison] :

La somme des n équations (7)

$$\mu(\mu+n)V+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial V}{\partial x_k}-x_k\sum_{j=1}^{j=n}x_j\frac{\partial V}{\partial x_j}\right]=0$$

est identique à l'équation qui exprime que $\frac{1}{r^{n+\mu}}V_{m_1,\ldots,m_n}$ *est une fonction harmonique.*

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les équations aux dérivées partielles vérifiées par les polynomes d'Hermite, déduits d'une exponentielle.* Note de M. **Pierre Humbert**, présentée par M. P. Appell.

Dans un des derniers numéros [2] M. Appell a donné, par une méthode directe et rapide, une expression simple pour une solution de seconde espèce des équations aux dérivées partielles auxquelles satisfait le polynome $U_{m,n}$ d'Hermite. Nous allons appliquer le même procédé aux équations que vérifient les polynomes à deux variables, également introduits par Hermite [3], qui naissent de la différentiation d'une exponentielle dont l'exposant est une forme quadratique de x et y. En rapprochant les résultats que nous obtiendrons de ceux de M. Appell, on se rendra compte que la méthode suivie semble susceptible de s'appliquer à des cas très étendus.

Hermite définit le polynome $H_{m,n}(x, y)$ par

$$H_{m,n}(x,y)=(-1)^{m+n}e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)}\frac{\partial^{m+n}e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}}{\partial x^m\,\partial y^n}$$

où

$$\varphi(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2.$$

Il établit que ce polynome vérifie les deux équations aux dérivées

(1) *Loc. cit.*, p. 38.

(2) *Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 309.

(3) *Œuvres*, t. 2, p. 293.

partielles

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} a\dfrac{\partial^2 H_{m,n}}{\partial\xi^2} + b\dfrac{\partial^2 H_{m,n}}{\partial\xi\,\partial\eta} - \xi\dfrac{\partial H_{m,n}}{\partial\xi} + mH_{m,n} = 0, \\ c\dfrac{\partial^2 H_{m,n}}{\partial\eta^2} + b\dfrac{\partial^2 H_{m,n}}{\partial\xi\,\partial\eta} - \eta\dfrac{\partial H_{m,n}}{\partial\eta} + nH_{m,n} = 0, \end{cases}$$

avec

$$\xi = ax + by, \qquad \eta = bx + cy.$$

Nous chercherons simplement à déterminer une seconde solution, $H^{(2)}_{m,n}$, de ce système. Si nous posons

$$\mathcal{H}_{m,n}(x, y) = \frac{\partial^{m+n} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}}{\partial x^m\,\partial y^n},$$

il nous sera facile d'écrire les équations auxquelles satisfait $\mathcal{H}_{m,n}$:

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} c\dfrac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial x^2} - b\dfrac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial x\,\partial y} + \Delta x\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} + \Delta(m+1)\mathcal{H} = 0, \\ a\dfrac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial y^2} - b\dfrac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial x\,\partial y} + \Delta y\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial y} + \Delta(n+1)\mathcal{H} = 0, \end{cases}$$

où

$$\Delta = ac - b^2.$$

Or on peut observer qu'on passe du système suivant :

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} c\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} - b\dfrac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + \Delta x\dfrac{\partial P}{\partial x} + \Delta P = 0, \\ a\dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} - b\dfrac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + \Delta y\dfrac{\partial P}{\partial y} + \Delta P = 0, \end{cases}$$

au système (II), en posant

$$\mathcal{H}_{m,n} = \frac{\partial^{m+n} P}{\partial x^m\,\partial y^n}.$$

Nous dirons que les équations (III) sont les *équations de Didon* du système (II). Une solution de (III) est évidemment

$$P_1 = e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}.$$

Tout revient à chercher une autre solution P_2 du système de Didon.

Si nous posons

$$P = e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}Q,$$

et que nous fassions le changement de variable

$$\xi = ax + by, \qquad \eta = bx + cy,$$

nous obtenons pour Q les équations très simples

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} a\dfrac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + b\dfrac{\partial^2 Q}{\partial \xi\, \partial \eta} - \xi\dfrac{\partial Q}{\partial \xi} = 0, \\ c\dfrac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} + b\dfrac{\partial^2 Q}{\partial \xi\, \partial \eta} - \eta\dfrac{\partial Q}{\partial \eta} = 0. \end{cases}$$

On voit au premier coup d'œil que la deuxième équation sera satisfaite si l'on prend pour Q une fonction de ξ seul : la première équation donnera alors la solution

$$Q_2 = \int_0^{\xi} e^{\frac{t^2}{2a}}\, dt,$$

ou, si nous désignons par $\mathfrak{L}(z)$ la transcendante $\int_0^z e^{t^2}\, dt$,

$$Q_2 = \mathfrak{L}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a}}\right) = \mathfrak{L}\left(\frac{ax + by}{\sqrt{2a}}\right);$$

d'où la seconde solution cherchée,

$$H^{(2)}_{m,n} = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\, \partial y^n}\left[e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)}\, \mathfrak{L}\left(\frac{ax + by}{\sqrt{2a}}\right)\right].$$

Remarquons d'ailleurs qu'une troisième solution, également évidente, des équations (IV) est

$$Q_3 = \mathfrak{L}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2c}}\right) = \mathfrak{L}\left(\frac{bx + cy}{\sqrt{2c}}\right),$$

ce qui permettra d'écrire une troisième fonction $H^{(3)}_{m,n}$.

L'analogie avec le cas d'une variable est frappante et ressort du fait que l'équation différentielle

$$U''_m - ax\, U'_m + am\, U_m = 0,$$

qui a pour solution le polynome d'Hermite à une variable,

$$U_m = e^{\frac{ax^2}{2}} \frac{d^m e^{-\frac{ax^2}{2}}}{dx^m},$$

admet une solution de seconde espèce qu'on peut écrire

$$U_m^{(2)} = e^{\frac{ax^2}{2}} \frac{d^m}{dx^m}\left[e^{-\frac{ax^2}{2}} \mathcal{L}\left(x\sqrt{\frac{a}{2}}\right)\right].$$

Si l'on veut avoir une quatrième solution des systèmes (I) ou (IV), et par là leur intégrale générale, il faudra effectuer des calculs beaucoup plus compliqués. On pourra, par exemple, suivre la marche indiquée par Didon [1] pour l'intégration du système auquel satisfont les polynomes $V_{m,n}$ d'Hermite. On trouvera ainsi qu'une quatrième solution de (IV) est

$$Q_4 = \mathcal{L}\left(\frac{ax+by}{\sqrt{2a}}\right)\mathcal{L}\left(\sqrt{\frac{\Delta}{2a}}y\right) + \mathcal{L}\left(\frac{bx+cy}{\sqrt{2c}}\right)\mathcal{L}\left(\sqrt{\frac{\Delta}{2c}}x\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\int_{x_0}^{x} du \int_{y_0}^{y} dv\, e^{\frac{1}{2}\varphi(u,v)},$$

d'où l'on tirera une quatrième solution $H_{m,n}^{(4)}$ du système (I). L'intégrale générale de ce système sera donc

$$H = k_1 H_{m,n} + k_2 H_{m,n}^{(2)} + k_3 H_{m,n}^{(3)} + k_4 H_{m,n}^{(4)},$$

les k étant des constantes arbitraires.

HYDRAULIQUE. — *Sur les grandes vitesses de l'eau dans les conduites.* Note [2] de M. C. Camichel, transmise par M. A. Blondel.

Les hautes pressions actuellement utilisées dans l'industrie hydraulique peuvent donner à l'eau des vitesses considérables de l'ordre de 100^m par seconde, par exemple; jusqu'à présent, l'étude de ces vitesses a été, du moins à ma connaissance, complètement laissée de côté, les expériences signalées concernant toutes des vitesses inférieures à 10^m par seconde. L'objet de cette Note est d'indiquer les résultats que j'ai obtenus relativement aux pertes de charge dans les tubes pour des vitesses atteignant 80^m par seconde.

---

(1) *Ann. Ec. Norm.*, t. 6, 1869, p. 7 à 26.

(2) Séance du 30 septembre 1918.

La disposition adoptée est la suivante :

Un accumulateur de 1000^{l} de capacité et dont la pression est 150^{kgm} par centimètre carré, équivalant par conséquent aux plus hautes chutes utilisées actuellement, est mis en communication avec le tube horizontal dans lequel l'eau s'écoule; un robinet à pointeau, placé entre l'accumulateur et le tube, permet de faire varier la vitesse de l'eau.

Supposons que la vitesse est partout parallèle à l'axe du tube et que le régime permanent est établi; prenons l'axe du tube à partir de l'orifice d'entrée comme axe des x, Oy horizontal et Oz vertical, et appliquons les équations générales du mouvement des liquides pesants doués de viscosité. La vitesse se réduit à la composante u parallèle à Ox, les deux autres composantes v et w sont nulles; on en déduit facilement que $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$, c'est-à-dire que la pression est uniforme dans toute la section du tube. L'équation de continuité donne $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, ce qui veut dire que la vitesse du fluide est la même en tous les points d'une même parallèle à l'axe du tube. Enfin on trouve que $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const.}$, c'est-à-dire que la pression varie uniformément d'une extrémité à l'autre du tube.

Étendons ces résultats au cas des grandes vitesses.

Nous mesurerons les pertes de charge en évaluant les pressions en divers points du tube; il ne serait pas correct de mesurer la différence de pressions aux deux extrémités du tube, car la pression P'_0 qui règne dans la section du tube à l'orifice d'entrée diffère beaucoup de la pression P_0 dans le réservoir qui alimente le tube mesurée en un point où le liquide est immobile. La différence $P_0 - P'_0$ correspond à la chute de pression nécessaire pour donner au liquide la force vive qu'il a à l'entrée du tube et pour vaincre les frottements des filets liquides les uns contre les autres, dans le réservoir qui alimente le tube. A la sortie, au contraire, l'examen du jet montrant que la distribution des vitesses est la même que dans l'intérieur du tube, on peut en conclure qu'il en est de même pour les pressions. Il n'y aurait donc pas de difficulté pour l'extrémité aval du tube, mais en revanche l'évaluation de la différence $P_0 - P'_0$ à l'entrée serait bien incertaine. Il faut remarquer en outre que la contraction de la veine, qui se produit dans la partie antérieure du tube, rend complètement inexacte pour cette région l'hypothèse du parallélisme des filets liquides à l'axe du tube; par exemple, dans un tube de 3^{mm} de diamètre et de $0^{m},20$ de longueur, traversé par de l'eau ayant à la sortie une vitesse de 80^{m} à la seconde, la contraction de la veine est telle qu'à 5^{cm} de l'entrée, la pression y devient sensiblement égale à la pression atmosphérique et que le tube peut être ouvert en ce point sans qu'il y ait écoulement de l'eau à l'extérieur.

Il en résulte qu'il faut mesurer les pressions à une certaine distance, 12^{cm} au moins, de l'orifice d'entrée et employer des tubes de $0^{m},50$ de longueur au minimum. Les manomètres étaient des appareils Bourdon, étalonnés, avant et après l'essai, par

comparaison avec un manomètre Marecx (piston chargé de poids) alimenté par une pompe Decauville du modèle de celles qui servent à essayer les obus.

Les tubes étudiés avaient un diamètre intérieur de 3^{mm} environ, qui était mesuré au moyen d'un microscope à réticule, muni d'un chariot micrométrique. Les expériences ont porté sur trois tubes : un de cuivre rouge, les deux autres de laiton. Voici quelques résultats correspondant à un tube de laiton :

Diamètre intérieur, $0^m,0029$; longueur, $0^m,485$.

Dans la première colonne du Tableau ci-après, J désigne la quantité $-\frac{\partial p}{\partial x}$, évaluée en mètres d'eau par mètre de longueur ; la deuxième colonne donne les valeurs correspondantes de la vitesse moyenne U, égale au quotient du débit par la section évaluée en mètres par seconde.

$J = -\frac{\partial p}{\partial x}$.	U.	J.	U.
m	m	m	m
2060	79,9	24,7	7,8
1690	75,1	6,8	3,8
1400	66,0	2,8	2,3
930	55,6	1,9	1,8
642	46,7	0,74	1,1
452	37,9	0,24	0,49
176	22,9	0,040	0,093

Si l'on construit la courbe ayant comme abscisse log U et comme ordonnée $\log\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)$, les points correspondant aux vitesses inférieures à $0^m,50$ par seconde se placent sur une droite ayant pour équation

$$\log J = \log U + 0,395; \tag{1}$$

cette droite représente le *régime de Poiseuille*. Les points correspondant à des vitesses supérieures à $2^m,50$ se placent sur une autre droite

$$\log J = 1,93 \log U - 0,36, \tag{2}$$

qui représente le *régime hydraulique*. Tout ceci est conforme aux recherches de M. Couette et de M. Osborne Reynolds, le coefficient 1,93 trouvé diffère très peu de celui qui résulte des expériences de Darcy et qui est égal à 1,92 ; mais le résultat qui n'avait pas été indiqué jusqu'à présent et qui constitue l'objet de cette Note est le suivant : la droite (2) représente avec toute la rigueur désirable la relation entre J et U, jusqu'aux vitesses

de 80^m par seconde; les points obtenus expérimentalement se placent sur cette droite avec une telle précision qu'il est vraisemblable que la même relation s'applique pour des vitesses encore plus élevées.

Il résulte donc avec la plus grande netteté, des expériences signalées, que la loi de variation de la perte de charge en fonction de la vitesse est la même pour les faibles vitesses ordinairement employées dans l'industrie et pour les grandes vitesses, par exemple 80^m par seconde, que les hautes chutes permettent de produire.

Ce résultat peut dès maintenant être utilisé par les ingénieurs.

Nous nous proposons, avec M. Eydoux, d'étendre ces expériences et de poursuivre l'étude des propriétés de l'eau aux grandes vitesses; des recherches de ce genre présentent des difficultés provenant des puissances considérables qu'elles nécessitent et des précautions qu'elles exigent.

ASTRONOMIE. — *Sur la limite et l'extension d'une atmosphère. Application aux planètes.* Note (1) de M. **A. Véronnet**, présentée par M. P. Puiseux.

Le libre parcours moyen l d'une molécule est très voisin de 10^{-5} cm, à zéro degré et sous pression normale P_1, pour la plupart des gaz. Il varie proportionnellement au volume pour les faibles pressions et l'on a

$$\frac{l}{l_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{P_1 T}{p T_1}. \tag{1}$$

Si l'on s'élève dans l'atmosphère la pression diminue proportionnellement plus vite que la température et le libre parcours augmente. Il arrive un moment où ce libre parcours devient égal à la hauteur maximum h à laquelle peut s'élever verticalement une molécule animée d'une vitesse V et soumise à la pesanteur γ. A ce niveau la limite de l'atmosphère peut être considérée comme atteinte.

La théorie cinétique indique en effet que la pression sur un élément de surface est proportionnelle à la vitesse moyenne V des molécules. En appelant dV la variation de cette vitesse moyenne sous l'action de la pesanteur, on a

$$p\, dV = V\, dp. \tag{2}$$

(1) Séance du 30 septembre 1918.

La pression sera nulle contre la paroi supérieure d'un récipient et l'on pourra la supprimer, quand on aura $dV = V$, car la vitesse des molécules s'annulera à ce niveau. Cela a bien lieu quand on a $l = h$, en supposant toutes les molécules animées de la même vitesse V. Au delà on n'aura plus un gaz réel, mais seulement des molécules isolées dont la vitesse est plus grande que V.

Or on a d'après la théorie des gaz $\mu V^2 = 3\,RT$, où μ est la masse moléculaire.

On en déduit pour le libre parcours et la pression limite

$$(3) \qquad l = h = \frac{V^2}{2\gamma} = \frac{3\,RT}{2\gamma\mu}, \qquad \frac{p}{P_1} = \frac{2}{3}\,\frac{l_1}{RT_1}\,\gamma\mu.$$

La loi de variation de pression des gaz sous la pesanteur γ donne alors pour la hauteur x de cette atmosphère, en y regardant T comme constant,

$$(4) \qquad x = r_1\left(1 - \frac{r_1}{r}\right) = \frac{RT}{\gamma\mu}\,L\,\frac{p_1}{p}.$$

r exprime la distance au centre quand, x devenant considérable, il faut tenir compte de la variation de γ (r_1 étant la distance de la surface au centre et p_1 la pression à la surface).

On obtient sur la Terre les pressions limites $5{,}76.10^{-13}$ atm pour l'hydrogène; $8{,}06.10^{-12}$ pour l'azote et $9{,}21.10^{-12}$ pour l'oxygène. Notre atmosphère s'élèverait à $9{,}21.10^{-12}$ pour l'oxygène. Notre atmosphère s'élèverait à 166^{km} si elle était composée uniquement d'azote, à 145^{km} si elle était composée d'oxygène, en prenant 213° A. ou — 60° C. comme température moyenne de l'atmosphère.

Comme des étoiles filantes paraissent avoir été visibles à 400^{km} d'altitude, il faut admettre la présence d'un gaz plus léger. Une proportion de 40.10^{-12} d'hydrogène à la surface suffirait pour étendre sa limite à 380^{km}, avec des molécules isolées rebondissant à 135^{km} plus haut, valeur du libre parcours l à la pression limite. L'atmosphère s'étendrait ainsi à plus de 500^{km}.

Sur le Soleil l'hydrogène s'élèverait à 4650^{km}, soit 6″, 50, au-dessus de la couche où sa pression serait d'une atmosphère. La limite serait encore plus élevée dans une atmosphère plus légère de coronium.

Sur les autres planètes, en admettant que l'atmosphère est formée des mêmes éléments que sur la Terre, et que sa masse totale est proportionnelle à la masse de la planète, on trouve que la pression à la surface est propor-

tionnelle au carré de la pesanteur et que la pression limite est inverse de la pesanteur à la surface

$$(5) \qquad \frac{p_1}{P_1} = \frac{\gamma^2}{g^2}, \qquad \frac{p}{p_1} = \frac{2}{3}\frac{l_1}{RT_1}\frac{g}{\gamma}g\mu.$$

La hauteur de l'atmosphère sera donnée ensuite par la formule (4). La température T est inverse de la racine carrée de la distance au Soleil en vertu de la loi de Stefan.

Si l'atmosphère s'étendait très loin en dehors de la planète, il arriverait un moment où la vitesse des molécules serait égale à la vitesse parabolique. Les molécules s'échapperaient. On a pour cette autre limite extrême la formule

$$(6) \qquad V^2 = 2\gamma r = \frac{3\,RT}{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{r}{r_1} = \frac{2}{3}\frac{\gamma\mu r_1}{RT}.$$

Le Tableau suivant donne la hauteur x de l'atmosphère et la pression p_1 à la surface pour les principales planètes et la valeur minimum de la limite extrême de r (formule 6) dans le cas de l'hydrogène :

	Mercure.	Vénus.	Terre.	Mars.	Jupiter.	Saturne.	Uranus.	Neptune.
x K$_m$...	600	200	150	330	26	46	37	29
$p_1 : P_1$..	0,17	0,77	1,00	0,14	6,4	1,12	0,85	0,90
$r : r_1$...	4,4	34	47,1	11,6	3000	1500	760	1050

On voit que la pression superficielle p_1 serait assez voisine de la nôtre sur les autres planètes, sauf sur Mercure et Mars où elle serait environ 6 fois moindre et sur Jupiter où elle serait 6 fois plus grande. Par contre, l'atmosphère s'élèverait un peu plus haut sur les autres petites planètes et serait beaucoup plus basse sur les grosses planètes à forte attraction. Elle serait limitée à 26^{km} seulement sur Jupiter, à moins qu'il n'y ait une forte proportion d'hydrogène. La dépression atmosphérique en altitude y serait extrêmement rapide. Un plateau de quelques kilomètres de haut s'élèverait dans une atmosphère assez raréfiée pour être visible de la Terre (tache rouge) alors que la surface, recouverte par 2,53 fois plus d'air que sur la Terre, serait invisible.

La limite extrême de l'atmosphère, même supposée formée d'hydrogène, est très étendue pour toutes les planètes. Il faudrait que l'hydrogène sur la nôtre s'étende à 47 fois le rayon actuel pour s'échapper. Sur Jupiter il pourrait s'élever à 3000 fois son rayon.

Sur Mercure, au contraire, la limite moyenne ne dépasserait pas 4,5 fois son rayon. Comme la force vive de certaines molécules atteint le double de la force vive moyenne et que la température initiale peut s'estimer au triple de la température actuelle, l'hydrogène non combiné a pu s'échapper. Peut-être n'y a-t-il pas eu alors formation d'eau.

Pour la Lune on trouverait une pression initiale à la surface de $0^{atm},028$ seulement ou de 30^g par centimètre carré; mais cette atmosphère se serait élevée jusqu'à une hauteur égale à 3 fois le rayon de notre satellite. Cette faible atmosphère a dû être absorbée par le sol, comme l'eau de mer elle-même. En tout cas la limite extrême qui est de 2,12 rayons pour l'hydrogène s'élève à 30 fois son rayon pour l'azote et l'attraction de notre satellite aurait toujours été suffisante pour retenir l'azote et l'oxygène.

PHYSIQUE. — *Efforts internes développés dans les métaux et alliages par l'effet d'un refroidissement rapide*. Note de M. **Portevin**, transmise par M. Henry Le Chatelier.

Les efforts internes sont mis en évidence par les déformations qui accompagnent l'usinage, c'est-à-dire la suppression des liaisons résultant de la cohésion de la matière.

Si l'on veut procéder à l'analyse de l'état d'équilibre élastique interne, il faut recourir à la détermination de la valeur des efforts internes dans des couches minces enlevées successivement à l'outil, en mesurant avec une très grande précision les modifications de dimensions du solide restant. C'est la méthode utilisée par Heyn et Bauer (¹) pour l'étude des efforts propres dans les barres étirées.

Nous avons utilisé ce procédé pour l'étude des efforts internes créés lors du refroidissement rapide, par immersion dans l'eau, de cylindres pleins ou creux en divers métaux et alliages (cuivre, nickel, laiton, aciers ordinaires et spéciaux), en opérant, soit sur des jauges à bouts sphériques de 20^{mm} de longueur, soit sur des cylindres pleins de 70^{mm} de diamètre, soit sur des cylindres creux de 75^{mm} de diamètre extérieur et de 8^{mm} à 10^{mm} d'épaisseur.

En raison de la complication des phénomènes, nous ne retiendrons cette fois, des résultats acquis, que les conclusions suivantes relatives à l'effet résultant du refroidissement rapide en dehors de l'influence des points de

(¹) *Int. Zeit. Metall.*, t. 1, 1911, p. 16-48.

transformation et en nous limitant à l'étude des efforts longitudinaux.

Pour les échantillons des dimensions ci-dessus indiquées, le refroidissement rapide, par immersion dans l'eau, développe des efforts internes qui mettent en compression longitudinale les zones extérieures et en extension longitudinale les régions centrales des cylindres pleins.

L'importance des efforts qui naissent ainsi dépend naturellement, à égalité de dimension des cylindres, des caractéristiques physiques de la matière (coefficient de dilatation, conductibilité calorifique, module et limite élastiques). C'est ainsi que, pour des jauges de 20^{mm} de diamètre trempées dans l'eau à 750°, les efforts internes longitudinaux sont infimes pour le cuivre (inférieurs en valeur absolue à 2 kg : mm^2, ils varient, pour le nickel, entre — 10 et + 6 kg : mm^2) et dépassent dans le laiton (60 pour 100 cuivre) ± 15 kg : mm^2.

Le revenu après trempe, dont un des effets est d'atténuer ou de faire disparaître des efforts internes dus à la trempe, peut donc, s'il est suivi d'un refroidissement rapide, en créer de nouveaux ([1]). Nous citerons les exemples suivants, relatifs à des cylindres pleins de 70^{mm} de diamètre préalablement trempés à 850° dans l'eau et soumis au revenu à diverses températures :

1° *Acier demi-dur.*

		Compression longitudinale périphérique moyenne sur 10^{mm} d'épaisseur (kg : mm^2).
Revenu à 550° suivi de	refroidissement lent........	— 4
	immersion dans l'eau.......	—14
Revenu à 700° suivi de	refroidissement à l'air......	— 0,1
	immersion dans l'eau.......	—27

2° *Acier nickel-chrome* (C = 0,3; Ni = 2,5; Cr = 0,7).

		Compression longitudinale périphérique moyenne sur 10^{mm} d'épaisseur (kg : mm^2).	Extension longitudinale centrale moyenne sur 15^{mm} de diamètre (kg : mm^2).
Revenu à 500° suivi de	refroidissement à l'air...	— 3	+15
	immersion dans l'eau....	—11	+31
Revenu à 650° suivi de	refroidissement à l'air...	— 4	+10,5
	immersion dans l'eau....	—34,5	+49,5

([1]) D'après Langley, l'immersion dans l'eau, de l'acier à 100°, créerait de légères tensions dont l'influence pourrait être mise en évidence par l'étude des densités.

On peut être ainsi amené à adopter, pour certains travaux de précision, un refroidissement lent après revenu afin d'éviter les déformations à l'usinage final. Par contre, on sait que, pour certains aciers (aciers phosphoreux, aciers nickel-chrome), le refroidissement trop lent après revenu au-dessus d'une certaine température a des inconvénients manifestes au point de vue de leur fragilité.

C'est un choix judicieux des conditions de refroidissement après revenu et de l'acier à faire suivant le but principal qu'on se propose et la destination des pièces.

Enfin, il convient de ne pas oublier qu'un certain état d'équilibre élastique interne peut être plus favorable à la résistance globale d'une pièce vis-à-vis d'efforts extérieurs déterminés que l'absence complète d'efforts internes.

Cette création d'efforts internes par refroidissement brusque, au-dessous des températures de transformation, peut, lors de l'étude de la trempe des aciers, permettre, dans une certaine mesure, de séparer les efforts résultant des modifications de l'état d'équilibre interne de ceux résultant de la trempe proprement dite.

RADIOLOGIE. — *La création des plans en radiographie stéréoscopique.* Note [1] de M. Henri Béclère, présentée par M. Quénu.

Dans la photographie stéréoscopique, ce que l'on cherche avant tout, c'est la mise en valeur des plans pour rendre le plus possible leur relief aux objets. Pour la radiographie stéréoscopique, la difficulté très grande de compréhension des images résulte du fait que les repères cutanés manquent pour la situation exacte des différentes parties du squelette. On a déjà proposé d'indiquer les plans superficiels par des anneaux métalliques. Le mieux et le plus simple est de procéder de la façon suivante. Le segment de membre, légèrement enduit de vaseline ou de lanoline, est massé avec un sel opaque aux rayons X, tel que le sous-nitrate de bismuth ou le carbonate. La poudre pénètre dans les moindres méandres de la peau. Sur le cliché radiographique, tous ces détails apparaissent très nettement. En stéréoscopie l'effet est saisissant. La peau avec sa structure rendue parfaitement visible montre tous ses contours et tous ses plis. Le squelette apparaît dans

---

[1] Séance du 30 septembre 1918.

ses rapports exacts avec les téguments. La peau, sur les clichés, donne l'impression d'une fine enveloppe de baudruche qui ne trouble en rien la netteté des détails du squelette. L'application du procédé à l'étude du matelassage des moignons en vue de l'appareillage donne de précieux résultats. Les rapports du squelette et de la peau sont ainsi très faciles à étudier. Dans le cas d'esquilles, il devient très simple de les situer, ce qui permet de prévenir des accidents grâce aux indications chirurgicales fournies.

GÉOLOGIE. — *Découverte d'un gisement fossilifère dans le Cantal.* Note de MM. **G.-F. Dollfus** et **P. Marty**, présentée par M. Pierre Termier.

Le gisement que nous nous proposons de faire connaître est situé dans la vallée du Goul, affluent immédiat de la Trueyre et médiat du Lot, au lieu dit « Pont de Gail », commune de Saint-Clément, canton de Vic-sur-Cère, près l'auberge de Froquière.

Le Goul draine une partie du secteur sud de la pyramide volcanique du Cantal, et sa vallée a été étudiée par Rames, Fouqué, M. Boule et par l'un de nous. En remontant la vallée, des environs du Raulhac à sa source, on traverse les terrains suivants :

1° Des micaschistes; 2° des sables quartzeux (Tongrien supérieur) qui ont livré aux environs de Saint-Flour : *Entelodon* sp., *Aceratherium Gaudryi*, Tortues; 3° des marnes versicolores, vertes et blanches (Rupélien-Stampien), qui contiennent aux environs d'Aurillac : *Nystia Duchasteli*, *Hydrobia Dubuissoni*, *H. Sandbergeri*, *Stenothyra pupa*, *Vivipara soricinensis*, *Potamides Lamarcki;* 4° des calcaires blancs et jaunes importants (Firmitien) dans lesquels on trouve les fossiles suivants : *Potamides Lamarcki* Brongt., *Limnea* cf. *cadurcensis* Noul., *L. symmetrica* Desh., *L. pachygaster* Thomae, *L. subpalustris* Thomae, *Planorbis cornu* Brongt., *Pl. Prevosti* Brongt., *Pupa* cf. *marginata* Bouillet et d'après M. Boule : *Helix corduensis* Noulet, *H. cadurcensis* N., *H. Boyeri* N. C'est au-dessus de cette série lacustre, toute oligocène, que débutent et se suivent les formations volcaniques; 5° trachyte passant au phonolithe; 6° labradorites; 7° conglomérat andésitique; 8° alluvions sableuses et cinérites avec plantes fossiles; 9° basaltes des plateaux; 10° amas glaciaires et alluvions anciennes.

Le conglomérat andésitique alterne à sa base, à Joursac, avec des alluvions à flore pontienne et renferme à ce niveau des ossements de *Dino-*

therium giganteum, *Rhinoceros Schleiermacheri*, *Hipparion gracile;* dans la masse même de ce conglomérat existent de nombreux et riches gisements de plantes fossiles du Plaisancien; les couches supérieures n'ont pas fourni jusqu'ici de Vertébrés fossiles, mais M. Boule les assimile stratigraphiquement aux couches de Périer (Puy-de-Dôme) à *Mustodon arvernensis* situées au niveau de l'Astien; les derniers travaux de M. Stehlin les placent sur l'horizon des couches de Montpellier et de Perpignan.

C'est dans ce conglomérat andésitique, dans une argile ligniteuse et sapropélienne, fortement disloquée, qui y est mêlée, que les fossiles nouveaux ont été trouvés par M. Marty. M. Dollfus y a reconnu : *Helix labyrinthiculus* Michaud, *Carychium pachychilus* Sandb., *Vertigo Dupuyi* Mich., *Planorbis filocinctus* Sandb., *Pl. Thiollierei* Mich., *Pl. Mariæ* Mich., *Pl. Matheroni* F. et T., *Limnea Bouilleti* Mich., *Zonites* (*Hyalina*), *nitens* Muller, *Bithinella abbreviata* Mich. sp. (*Paludina*), *Limax Martyi* n. sp. Il reste à l'étude des ossements de Mammifères, débris de Poissons, des graines diverses (*Ombellifères*, *Rosacées*, *Composées*, *Scrophulariées*, etc.) et des Diatomées. Ces Mollusques sont caractéristiques de la faune bien connue d'Hauterives (Drôme) étudiée par Michaud à deux reprises, par Fontannes, Locard, et dont l'horizon doit se classer d'après les travaux de MM. Depéret, Delafond, Sayn, etc. dans le Pliocène inférieur (Plaisancien), en confirmation de l'âge indiqué par les plantes, cet horizon étant un peu plus récent que celui de Cucuron, Montvendre qui est Miocène supérieur (Pontien).

La faune malacolagique de Pont-de-Gail est très voisine de celle du Miocène de Sansan, mais elle est plus récente; elle est apparentée aussi à celle des couches de Celleneuve près Montpellier, mais elle est par contre antérieure, sa place est nette.

C'est la première fois que la faune d'Hauterives est rencontrée aussi loin à l'Ouest; elle est connue aussi dans l'Ain, en Suisse, en Autriche (Eichkogel), en Hongrie et son extension, sous un facies saumâtre, s'étend fort loin vers l'Orient, caractérisant une période continentale qui commence avec le Miocène supérieur pour se poursuivre pendant le Pliocène inférieur. Cette détermination ne permet pas de faire remonter bien loin dans le passé les éruptions andésitiques du Massif central.

BOTANIQUE. — *Génération asexuée du* Padina pavonia *Lamour.* Note de M. **Pierre Georgevitch**, présentée par M. J. Costantin.

Les spores chez le *Padina pavonia* se trouvent, sur certains individus, sur la surface du thalle dans les sores linéaires et concentriques.

Les spores sont formées par certaines cellules de la couche assimilante du thalle, qui croissent d'une façon plus intensive que les cellules voisines.

Ces cellules donnent origine aux tétrasporanges; nous les appellerons donc les *rudiments du tétrasporange*.

Le noyau de la cellule du rudiment a une forme elliptique, et son axe est parallèle à la surface du thalle; assumant ensuite la forme arrondie, il s'allonge finalement dans la direction de l'axe le plus long de la cellule. Dans ce stade, le noyau du rudiment du tétrasporange se divise mitotiquement en deux cellules inégales : l'inférieure, plus petite, reste au niveau du thalle et représente ainsi la cellule basale; la cellule supérieure, plus grande, a la forme d'un dôme et représente la jeune cellule mère de la tétraspore.

Cette cellule grandit intensivement dans la direction verticale sur la surface du thalle, tandis que son noyau, qui occupe d'abord la partie basale de la cellule, croît plus intensivement sur son bout distal, occupant graduellement le milieu de la cellule.

Dans ce stade, le nucléole se colore intensivement et montre trois vacuoles dans sa masse. Le spirème de ce noyau est mince et se colore faiblement avec l'hématoxyline; mais avec la croissance de ce noyau, le spirème devient aussi plus clair et conduit au stade de synapsis. La plus grande partie de la masse chromatique s'accumule dans le bout distal de ce noyau allongé et est apposée étroitement à la membrane du noyau.

La masse chromatique est souvent concentrée en deux parties, de deux côtés du nucléole, mais nous ne pouvions pas constater de relation entre les deux parties chromatiques.

La masse chromatique est ensuite distribuée en filaments doubles, sur lesquels on voit clairement des granulations, pendant que les filaments eux-mêmes sont dispersés dans la cavité du noyau, formant ainsi le réseau chromatique.

Durant ce stade, la membrane du noyau est conservée en entier; tandis que les centrosomes, ainsi que la radiation kinoplasmatique sur les pôles du noyau, restent invisibles.

Les chromosomes se différencient graduellement du réseau chromatique en forme de doubles baguettes et d'anneaux fermés étant accumulés

autour du nucléole, qui conserve pendant ce stade sa forme et sa coloration intensive.

Le noyau, même après avoir atteint son plein développement, occupe le centre de la cellule et prend la forme d'un tonneau.

A présent, on voit sur chacun des deux pôles du noyau un centrosome en baguette recourbée avec une radiation kinoplasmatique nette.

Dans ce stade le fuseau est déjà formé, il est intranucléaire et central.

Le fuseau est composé d'abord de cinq à six faisceaux dont chacun est composé de deux grosses fibrilles qui s'étendent d'un pôle à l'autre du noyau.

Le fuseau est tronqué sur les pôles et touche presque le centrosome. Pendant que le noyau croît dans le sens de la longueur, la membrane du noyau se résorbe graduellement, d'abord sur l'équateur du noyau, tandis que sur ses pôles la membrane se conserve assez longtemps.

Par un pareil développement, le fuseau s'allonge d'un tiers à peu près de la longueur initiale, mais il est alors plus mince et suspendu librement dans le kinoplasma central du noyau, dont la membrane est parfaitement résorbée.

Dans ce stade, les chromosomes sont déjà disposés sur l'équateur du fuseau, se plaçant graduellement dans un disque plat de la plaque nucléaire.

Le nombre des chromosomes est de 24, ce qui représente le nombre végétatif (diploïde) qui se trouve aussi dans les cellules du thalle, ainsi que dans les rudiments du tétrasporange.

Dans le stade de métaphase, les chromosomes doubles se fendent en leurs moitiés, qui sont les chromosomes univalents, atteignant en nombre réduit de 12 les pôles du fuseau, où ils s'agrègent dans les nouveaux noyaux des cellules-filles.

Le noyau-fille est de forme ovale avec une proéminence distincte vers le pôle du fuseau et montre un centrosome, autour duquel on voit à présent une radiation bien nette.

Dans la prophase, la masse chromatique du noyau-fille se concentre dans les 12 chromosomes univalents, ce qui représente le nombre réduit (haploïde). Ces chromosomes se fendent ensuite, et leurs moitiés atteignent les pôles du fuseau, où les nouveaux noyaux sont formés : deux dans la partie supérieure et deux dans la partie inférieure de la cellule-mère des tétraspores.

Les cloisons des cellules se forment ensuite entre les quatre noyaux et aboutissent ainsi à la formation des quatre tétraspores.

ENTOMOLOGIE. — *La faune entomologique subfossile des tourbières sous-marines de Belle-Ile.* Note de M. **Pierre Lesne**, présentée par M. E.-L. Bouvier.

On sait qu'il existe, en différents points de la côte de Bretagne, des terrains tourbeux, aujourd'hui submergés par la mer, et dont la formation, datée par les objets qu'ils recèlent, remonte à la période s'étendant du néolithique au gallo-romain (A. de Lapparent, 1900). Plusieurs observateurs (de la Fruglaye, 1811; Quenault, 1869, etc.) ont déjà signalé la présence dans ces couches de fragments d'insectes en bon état de conservation; mais l'étude ne paraît pas en avoir encore été entreprise.

Les recherches poursuivies par M. Emile Gadeceau sur les tourbières sous-marines de Belle-Ile ont fourni à ce naturaliste l'occasion de réunir un certain nombre de débris d'insectes subfossiles, dont l'examen m'a permis de reconnaître la présence dans ces formations d'une série d'espèces appartenant, pour la plupart, à l'ordre des Coléoptères. Celles que j'ai pu identifier jusqu'ici sont les suivantes :

Carabidæ.

1. *Platysma nigrum* Schall.
2. *Pseudophonus ruficornis* F.

Dyticidæ.

3. *Ilybius* sp.
4. *Dyticus punctulatus* F.

Gyrinidæ.

5. *Gyrinus bicolor* F.
6. » *Suffriani* Scriba.

Hydrophilidæ.

7. *Limnoxenus oblongus* Herbst.
8. *Cyclonotum orbiculare* F.

Histeridæ.

9. *Hister quadrimaculatus* L.
10. *Onthophilus sulcatus* F.

Curculionidæ.

11. *Apion æneum* F.

Cerambicydæ.

12. *Dorcadion fuliginator* L.

Chrysomelidæ.

13. *Donacia clavipes* F.
14. » *polita* Kunze.

Scarabæidæ.

15. *Sisyphus Schæfferi* L.
16. *Onthophagus ovatus* L.
17. » *nuchicornis* L.
18. » *vacca* L.
19. *Geotrypes* (? *pyrenæus* Charp.).

Cette liste comprend huit espèces aquatiques ou plutôt aquicoles, qui

fréquentent exclusivement les eaux douces et notamment les eaux stagnantes (*Limnobius*, *Ilybius*, etc.). Parmi elles, les *Donacia* sont des phytophages inféodés aux Phanérogames aquatiques. Le *D. clavipes* vit à l'état de larve sur la partie immergée des tiges du *Phragmites communis* Trin. (A.-G. Böving, 1906).

Les onze autres espèces sont purement terrestres, épigées à l'état adulte (*Platysma*, *Pseudophonus*, *Dorcadion*), saprophiles (*Onthophilus*) ou coprophiles (*Sisyphus*, *Onthophagus*, *Geotrypes*, *Hister*); l'une d'elles (*Apion æneum*) est phytophage et se développe dans la tige des *Malva* et des *Althæa*.

Parmi ces espèces terrestres, on remarque une série de formes recherchant les terrains secs et les lieux découverts (*Pseudophonus*, *Dorcadion*, *Sisyphus*, *Onthophagus nuchicornis*, *O. ovatus*). La présence du *Dorcadion fuliginator* qui affectionne les friches et les talus gazonnés, où sa larve vit à la racine des Graminées, et celle d'un nombre relativement important d'espèces coprophages, impliquant l'existence dans les mêmes lieux de Mammifères herbivores, est particulièrement frappante.

D'ailleurs, les représentants subfossiles de presque toutes les espèces précédentes ne paraissent différer en rien des individus des mêmes espèces que nous observons aujourd'hui. Il faut en excepter cependant les Chrysomèles du genre *Donacia* qui se présentent comme des variétés ou plutôt comme des races chromatiques actuellement éteintes. Ainsi, la forme vivante du *D. clavipes* qui, au moins en France, se fait remarquer par la constance relative de sa teinte métallique, toujours verte ou légèrement bronzée, est représentée dans la tourbe de Belle-Ile par une race à élytres violets, soit en entier, soit seulement dans leur moitié externe, et l'élytre rapporté au *D. polita* a ses interstices externes occupés par une bande violette qui tranche vivement sur la teinte cuivreuse très franche de la région dorsale, alors que les individus vivants de la même espèce sont uniformément verts ou légèrement cuivreux. Il est intéressant de rapprocher ces faits de ceux constatés par G. de Lapouge pour les *Carabus* des tourbes campiniennes de Soignies (Belgique). Ces *Carabus* appartiennent tous à des espèces actuelles, mais ils constituent des races chromatiques particulières, qu'on ne retrouve plus aujourd'hui (1).

Au point de vue de la modification des faunes, le cas du *Donacia polita* mérite de retenir l'attention. Alors que toutes les autres espèces men-

---

(1) G. de Lapouge, *Ann. de la Soc. ent. de Belg.*, t. 47, 1903, p. 227.

tionnées ci-dessus comme existant dans les tourbes de Belle-Ile, habitent encore actuellement la région, celle-ci ne se rencontre aujourd'hui que dans la zone méditerranéenne (Espagne, Sardaigne, Italie, Croatie, Dalmatie, Algérie). Son aire d'extension géographique aurait donc subi une réduction ou un déplacement depuis les débuts de la période géologique actuelle. Si ce fait se trouvait confirmé, il présenterait un grand intérêt comme étant susceptible d'aider à la détermination de la date de la migration de toute une série d'espèces telles que le *Nebria complanata* L., l'*Helops cœruleus* L., le *Ceutorrhynchus verrucatus* Chevr., etc., dont l'aire d'extension, conformément à l'hypothèse de J. Sainte-Claire Deville [1], aurait subi, à une époque restée jusqu'ici indéterminée, un déplacement parallèle à celui offert par le *Donacia polita*.

Les observations qui précèdent mettent en évidence les faits suivants :

1° Au voisinage des eaux stagnantes où se formaient les tourbières de Belle-Ile aujourd'hui submergées, s'étendaient des prairies sèches que fréquentaient des Mammifères herbivores.

2° Toutes les espèces de Coléoptères jusqu'ici identifiées qui habitaient ces marais et ces prairies existent encore dans la faune actuelle ; mais deux d'entre elles, appartenant au genre *Donacia*, constituent des races éteintes.

3° L'une de ces espèces de *Donacia*, qui ne se rencontre plus aujourd'hui que dans la zone méditerranéenne, aurait émigré vers le Sud depuis le début de la période géologique actuelle.

La séance est levée à 15 heures trois quarts.

É. P.

---

(1) J. Sainte-Claire Deville, *Congrès international d'Entomologie* (Bruxelles, 1910), 1911, p. 309.